Cevap Anahtarı

1) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{30}$ bir epimorfizmadır

$n \longrightarrow f(n) = \bar{n}$

Çünkü * f'nin kapalı olduğu tanımdan açıktır.

* f'nin iyi tanımlılığı ise $n_1 = n_2$ iken $\bar{n_1} = \bar{n_2} \Rightarrow f(n_1) = f(n_2)$ olacağından kolaylıkla söylenebilir.

O halde f bir fonksiyondur.

Ayrıca $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ için

$f(n_1+n_2) = \overline{n_1+n_2} = \bar{n_1} + \bar{n_2} = f(n_1) + f(n_2)$

$f(n_1 . n_2) = \overline{n_1 . n_2} = \bar{n_1} . \bar{n_2} = f(n_1) . f(n_2)$

olup f'nin bir homomorfizma old. da kolaylıkla söylenebilir. Ek olarak $\forall \bar{n} \in \mathbb{Z}_{30}$ için $f(n) = \bar{n}$ o.ş $\exists n \in \mathbb{Z}$ old. açıktır. O halde f bir epimorfizmadır. $\mathbb{Z}_{30}$'un idealleri;

$\langle \bar{1} \rangle, \langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{5} \rangle, \langle \bar{6} \rangle, \langle \bar{10} \rangle, \langle \bar{15} \rangle, \langle \bar{0} \rangle$ dır

$Çekf = \{ n \in \mathbb{Z} \mid f(n) = \bar{0} \}$
$= \{ n \in \mathbb{Z} \mid \bar{n} = \bar{0} \} = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0 (30) \}$
$= \{ 30k \mid k \in \mathbb{Z} \} = 30\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$'nin Çekf'i yani $30\mathbb{Z}$'i kapsayan idealleri ise $\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}, 10\mathbb{Z}, 15\mathbb{Z}$ ve $30\mathbb{Z}$ dır.

O halde aralarındaki eşleme şu şekildedir

$\mathbb{Z} \rightarrow \langle \bar{1} \rangle$

$2\mathbb{Z} \rightarrow \langle \bar{2} \rangle$

$3\mathbb{Z} \rightarrow \langle \bar{3} \rangle$

$5\mathbb{Z} \rightarrow \langle \bar{5} \rangle$

$6\mathbb{Z} \rightarrow \langle \bar{6} \rangle$

$10\mathbb{Z} \longrightarrow \langle \bar{10} \rangle$

$15\mathbb{Z} \longrightarrow \langle \bar{15} \rangle$

$30\mathbb{Z} \longrightarrow \langle \bar{0} \rangle$

2) a) $J = \{ (\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1}), (\bar{2},\bar{2}), (\bar{3},\bar{3}) \}$ kümesi

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$'ün ideali olur mu?

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ olduğu açıktır.

$J \neq \phi$ ve $J \subseteq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$

i) $\forall (x,y), (z,t) \in J$ için

$(x,y) - (z,t) \in J$ dir.

ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ ve $\forall (z,t) \in J$ için

$(x,y)(z,t) \notin J$ dir. Çünkü

$(\bar{3},\bar{0}) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ ve $(\bar{2},\bar{2}) \in J$ için

$(\bar{3},\bar{0}).(\bar{2},\bar{2}) = (\bar{2},\bar{0}) \notin J$ dir. Farklı örnekler

de verilebilir. O halde J, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$'ün ideali değildir.

b) $0 \neq x \in R$ için $xyx = x$ o.ş $y \in R$ bir tek

var olsun.

$xyx = x = x.e \Rightarrow xyx - xe = 0_R$

$\Rightarrow x(yx - e) = 0_R$

$\underset{x \neq 0_R}{\overset{R \text{ sıfır bölensiz}}{\Longrightarrow}} yx - e = 0_R$

$\Rightarrow yx = e$ ve benzer şekilde

$xyx = x = ex \Rightarrow xyx - ex = 0_R$

$\Rightarrow (xy - e)x = 0_R$

$\underset{x \neq 0_R}{\overset{R \text{ sıfır bölensiz}}{\Longrightarrow}} xy - e = 0_R$

$\Rightarrow xy = e$

3) $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ Tamlık bölgesi olur mu?

* <u>Birimli mi?</u>

$x \odot y = y \odot x = x$ o.ş bir y birim elemanı var mı?

$2x + 2y + xy + 2 = x \Rightarrow x + xy + 2y + 2 = 0_{\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow x(1+y) + 2(1+y) = 0$

$\Rightarrow (x+2)(1+y) = 0$

$\Rightarrow 1 + y = 0$

$\Rightarrow y = -1$

e birimi -1 dir. Birimlidir.

*Değişmeli mi?

$x \odot y = 2x+2y+xy+2 = 2y+2x+yx+2 = y \odot x$ olup

halka değişmelidir

* Sıfır bölensiz mi?

Bunun için öncelikle halkanın sıfırını bulalım

$x \oplus y = y \oplus x = x$ ise $y=0$

$\Rightarrow x+y+2=x$

$\Rightarrow y=-2$ bulunur $\boxed{0_R=-2}$

Sıfır bölensizlik için $x \neq -2$ ve

$x \odot y = -2$ alalım.

$\Rightarrow 2x+2y+xy+2=-2$

$\Rightarrow 2x+2y+xy+4=0$

$\Rightarrow x(2+y)+2(2+y)=0$

$\Rightarrow (x+2)(2+y)=0$

$\overset{x\neq -2}{\Rightarrow} y+2=0$

$\Rightarrow y=-2$ olup $y=0_R$ Yani halka sıfır bölensizdir. $(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$ Tamlık bölgesidir

4) a) $\forall(\bar{a},\bar{b}) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15}$ ve $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7$ için

$n.(\bar{a},\bar{b})=(\bar{0},\bar{0})$ ise en küçük n pozitif tam sayılarını bulmalıyız.

$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15}$ için bu n pozitif tam sayısı

okek$(3,15)=15$ dir. Benzer şekilde

$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7$ için bu n pozitif tam sayısı

okek$(6,7)=42$ bulunur.

4) b) $4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{a+12\mathbb{Z} \mid a\in 4\mathbb{Z}\}$

$= \{0+12\mathbb{Z}, 4+12\mathbb{Z}, 8+12\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}_{15}/(\bar{5}) = \{a+(\bar{5}) \mid a\in\mathbb{Z}_{15}\}$

$= \{0+(\bar{5}), 1+(\bar{5}), 2+(\bar{5}), 3+(\bar{5}), 4+(\bar{5})\}$

5) a) $\mathbb{Z}_{12}$'nin birimsel ve nilpotent elemanlarını bulalım. Birimsel yani terslenebilir eleman olması için $\bar{a}$'nın $\bar{a}.\bar{b}=\bar{b}.\bar{a}=1_R$ o.ş bir $\bar{b}\in\mathbb{Z}_{12}$ var olması gerekir. Bu elemanlar da $\{\bar{1},\bar{5},\bar{7},\bar{11}\}$ dir. Bu elemanların tersleri vardır ve kendilerine eşittir.

Nilpotent eleman olması için ise $\bar{a}\in\mathbb{Z}_{12}$ için $(\bar{a})^n=\bar{0}$ o.ş bir $n\in\mathbb{Z}^+$ var olmalıdır. Bu koşulu sağlayan tek eleman ise $\{\bar{6}\}$dır. Çünkü $(\bar{6})^2=\bar{0}$ bulunur.

b) I'nın alt halka olması için öncelikle $I\neq\emptyset$ olmalıdır. R halka old $0_R\in R$ ve $a.0_R=0_R=b.0_R$ olduğundan $a.0_R\in bR \Rightarrow 0_R\in I$ yani $I\neq\emptyset$

I kümesinin tanımından açıktır $I\subseteq R$ old.

* $\forall x,y\in I$ için $x-y\in I$ olur mu?

$x,y\in I \Rightarrow ax\in bR$ ve $ay\in bR$ yazılır.

Bu durumda $ax=br_1$ ve $ay=br_2$ o.ş $r_1,r_2\in R$ vardır.

* $a(x-y)=ax-ay=br_1-br_2$
$=b\underbrace{(r_1-r_2)}_{\in R}\in bR \Rightarrow x-y\in I$

* $a(xy)=(ax).y=(br_1).y=b\underbrace{(r_1.y)}_{\in R}\in bR \Rightarrow xy\in I$

O halde I, R'nin bir alt halkasıdır.